余次元1の葉層構造の極限集合 (FoliationsとC^{∞}-写像)

西森, 敏之

数理解析研究所講究録
286巻 1977年 103-112

余次元1の葉層構造の極限集合

東北大 理　　西森敏之

Mを向きづけ可能 C^∞ 閉多様体とし，$\mathcal{F}$ をM上の向きづけ可能余次元1 $C^r(r \geq 1)$ 葉層構造とする。このとき $\mathcal{F}$ に横断的な C^∞ 流れ $\varphi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ が存在するから1つ固定しておく。

定義1. Fを $\mathcal{F}$ のコンパクトでない葉とする。$U \subset F$ とし，

$$L(U) = \left\{ y \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset U \text{ s.t. ① F の位相で集} \\ \text{積点なし. ② Mの位相で } \lim_{i\to\infty} x_i = y. \end{array} \right\}$$

とおく。L(F) をFの<u>極限集合</u>と呼ぶ。

我々の目標は葉Fの行動を調べることであるが，それは極限集合L(F)の構造を調べることとほぼ同等である。一般にL(F)は連結とは限らなく，L(F)をそのまま扱うのは良策ではない。力学系の定性的理論において α-極限集合，ω-極限集合を考えたように，葉層構造においては次に述べるように end の極限

集合を考えるのが妥当である。まず end の定義から始める。

定義2. コンパクトでない多様体Fの <u>end</u> とは，空でない連結開部分集合の族$\mathcal{E}$で次の(1)〜(4)をみたすもの。

(1) 任意の$U \in \mathcal{E}$に対して，$\partial U = Cl_F(U) - U$はコンパクト。

(2) $U, U' \in \mathcal{E} \Longrightarrow \exists U'' \in \mathcal{E}$ s.t. $U'' \subset U \cap U'$.

(3) $\bigcap \{ U \mid U \in \mathcal{E} \} = \phi$.

(4) (1),(2),(3)に関して$\mathcal{E}$は極大族.

endをわかりやすくするには，*Morse function* $f: F \to [0, \infty)$で

(1) $K \subset [0, \infty)$がコンパクトならば$f^{-1}(K)$もコンパクト.

(2) fの特異点は$f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, \cdots\})$に含まれる。

をみたすものを考えると便利である。fを固定しておいて，Fの開集合の減少列$U_1 \supset U_2 \supset \cdots$で

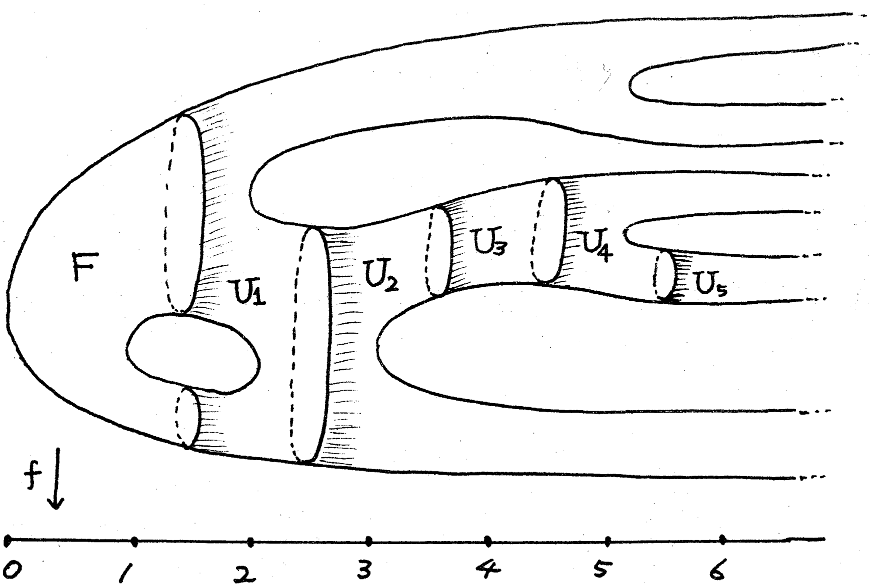
(*) U_iは$f^{-1}((i+\frac{1}{2}, \infty))$の連結成分

を考える。このとき，

$$\mathcal{E} = \left\{ U \;\middle|\; \begin{array}{l} U\text{はFの空でない連結開部分集合で} \\ \partial U\text{がコンパクトである}U_i\text{を含むもの.} \end{array} \right\}$$

とおくと$\mathcal{E}$はFのendになり，逆にFのend $\mathcal{E}$が与えられると$\mathcal{E}$は(*)をみたすFの開集合の減少列$\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$をただひとつ含む。従って対応：$\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \longmapsto \mathcal{E}$により，(*)をみたすFの開

集合の減少列の集合とFのendの集合は同一視できる。



定義3. εを$\mathcal{F}$の葉Fのendとする。

$$L_\varepsilon(F) = \bigcap_{U\in\varepsilon} cl_M(U)$$

とおいて，$L_\varepsilon(F)$をFの<u>ε-極限集合</u>あるいはεの<u>極限集合</u>と呼ぶ。

上に述べた減少列$\{U_i\}_{i=1}^\infty$を使うと，$L_\varepsilon(F) = \bigcap_{i=1}^\infty cl_M(U_i)$とかける。実直線$\mathbb{R}$は2つのend $\alpha = \{(-\infty, t) \mid t\in\mathbb{R}\}$, $\omega = \{(t,\infty) \mid t\in\mathbb{R}\}$をもち，力学系のコンパクトでない軌道$O_x$は対応する2つのend α, ωをもつが$L_\alpha(O_x) = L^-(x)$, $L_\omega(O_x) = L^+(x)$となる。

次に$L(F)$, $L_\varepsilon(F)$の基本的性質を述べる.

定理1. (1) $L(F)$, $L_\varepsilon(F)$は空でない閉集合で，いくつかの葉の和になっている。 (2) $L(F) = \bigcup_\varepsilon L_\varepsilon(F)$. (3) $L_\varepsilon(F)$は連結.（必らずしも孤状連結ではない）

最初に考えるべき自然な問題は，いつ $L_\varepsilon(F)$ がコンパクトな一枚の葉になるかという問題であるが，次のような解答を得る。

定理2. $L_\varepsilon(F)$がコンパクトな一枚の葉になるのは次の(1), (2), (3)が成立するときそのときに限る.

(1) εは孤立（i.e. $\exists U \in \varepsilon$ s.t. Uは他の end に含まれない）

(2) $L_\varepsilon(F) \cap F = \phi$.

(3) εは $L_\varepsilon(F)$ に一方側から近づく.（i.e. (I) $\forall x \in L_\varepsilon(F)$, $\exists t > 0, \exists U \in \varepsilon$ s.t. $\varphi(\{x\} \times (0,t)) \cap U = \phi$ or (II) $\forall x \in L_\varepsilon(F)$, $\exists t>0$, $\exists U \in \varepsilon$ s.t. $\varphi(\{x\} \times (-t,0)) \cap U = \phi$).

ここで定理2の必要性の部分の証明の概略を述べることにする。$L_\varepsilon(F) = F_1$ とおく。$F_1 \neq F$ であるから(2)は明らか。

予備定理. $\exists U \in \varepsilon$ s.t. $L(U) = F_1$.

この予備定理を証明したものとして話を進める。$x_0 \in F_1$ とする。十分小さな $\delta > 0$ をとると $\varphi(\{x_0\}\times(-\delta,\delta))\cap U$ は可算で離散的位相をもつ。x_0 から遠い順に番号をつけて

$$\varphi(\{x_0\}\times(0,\delta))\cap U = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$$

としてよい。(必要があれば φ の向きを変える). 各閉道 $\omega : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (F_1, x_0)$ に対して, $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\omega = (\varphi\circ(\omega\times id))^*\mathcal{F}$ を考える。このとき自然数Nと整数pが存在して, $n \geqq N$ ならば $(x_n, 0)$ と $(x_{n+p}, 1)$ は $\mathcal{F}_\omega$ の同じ葉の上にある。対応 $\omega \longmapsto p$ により準同型写像 u: $\pi_1(F_1, x_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を得る。$\mathbb{Z}$ は可換群であるから $u = v\circ H$ をみたす準同型写像 $v : H_1(F_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ が存在する。ただし $H : \pi_1(F_1, x_0) \longrightarrow H_1(F_1, \mathbb{Z})$ は Hurewicz 準同型である。

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(F_1, x_0) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{Z} \\
H_1(F_1, \mathbb{Z}) \arrow[ur, dashed, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

v を $\mathrm{Hom}(H_1(F_1,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \cong H^1(F_1^{n-1}, \mathbb{Z})$ の元とみなし, *Poincaré* 双対写像 $d : H^1(F_1^{n-1}) \longrightarrow H_{n-2}(F_1^{n-1})$ による像 $d(v)$ を考える。*Thom* の定理により, F_1 の余次元1の部分多様体Nが存在してその基本ホモロジー類 [N] が $d(v)$ と一致する。($n-1 \geqq 3$ のときは中塚の定理によりNは連結にできる). 連接近傍系を使う

葉層構造の理論の一般的議論を使えば，うめこみ $e: F_1^* \times [0,\delta'] \longrightarrow M$ （ただし F_1^* は $F_1 - N$ に N のコピー N_1, N_2 をはりつけて境界 $N_1 \cup N_2$ をもつコンパクト多様体にしたもの）で，

(1) $e|(F_1-N)\times\{0\} = \text{identity}$.

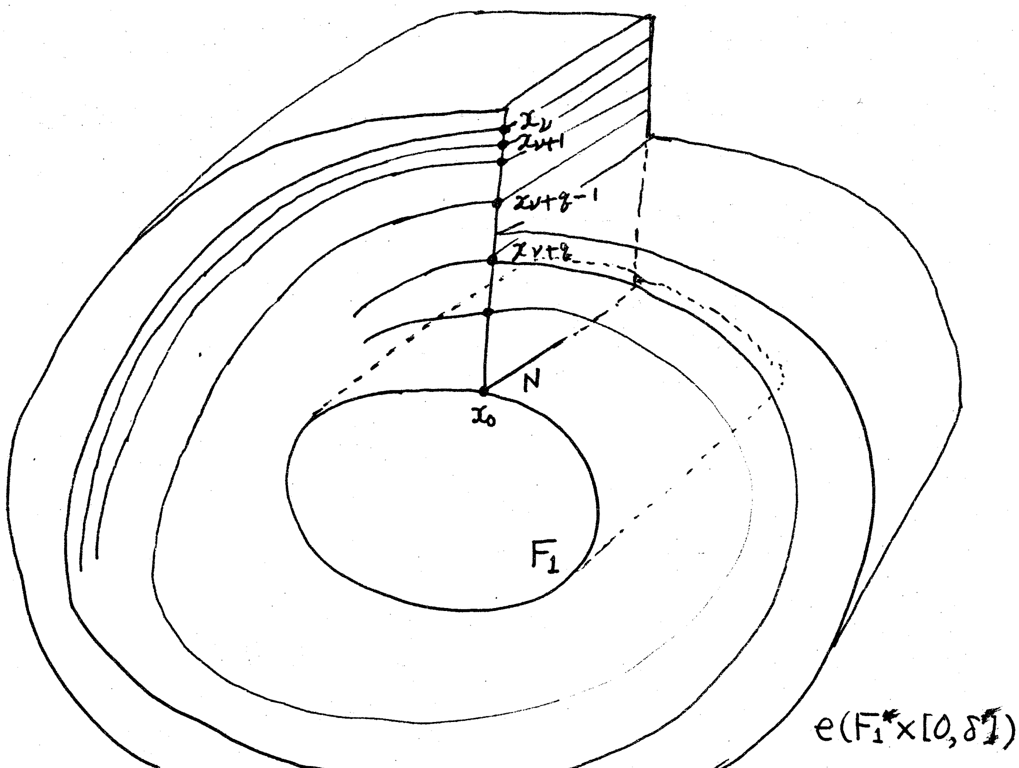
(2) $e(\{x\}\times[0,\delta']) \subset \varphi(\{x\}\times\mathbb{R})$

(3) $e(F_1^*\times\{t_\nu, t_{\nu+1},\cdots\}) \subset U$ for $\exists\nu$. ただし $\varphi(x_0,t_\nu)=x_\nu$

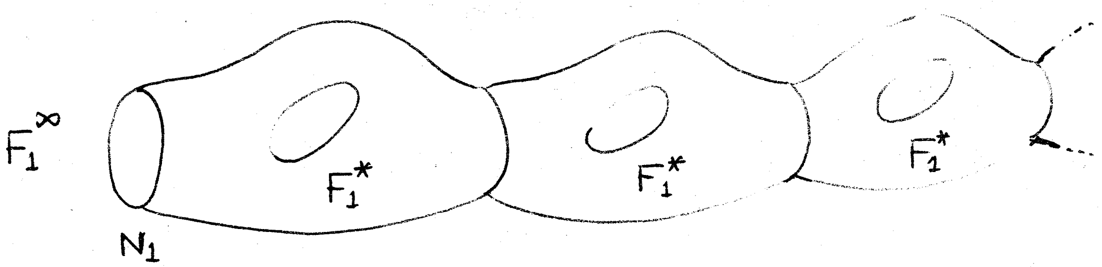
(4) $e((x_0)_1, t_\nu) = x_\nu$, $e((x_0)_2,t_\nu)=x_{\nu+q}$.

ただし $\mathrm{Im}\,u = q\mathbb{Z}$. $x_0\in N$, $(x_0)_1\in N_1$, $(x_0)_2\in N_2$,

を満たすものが存在することがわかる。（$e(F_1^*\times\{t\})$ は一般には $\mathcal{F}$ の一枚の葉に含まれるわけではない）



F_1^*を可算個 N_2とN_1を同一視することによりはりつけて得られる多様体をF_1^∞とおくと，$U\cap e(F_1^*\times[0,\delta'])$ は F_1^∞のg個の離散的和になっている。



$L_\varepsilon(F)=F_1$ であることから $\exists U_0\in\varepsilon$ s.t. $U_0\subset U\cap \mathrm{Im}\,e$. 従って U_0 は F_1^∞と同位相なFの部分集合に含まれる。明らかにF_1^∞は1つしか*end*をもたないので，εが孤立*end*であるということがわかる。同時に定理2の条件(3)が成立することもわかる。

この証明から *end* ε が極限集合 $L_\varepsilon(F)$ にどのように巻きついていくかもわかることを注意しておく。定理2の十分性の部分の証明は省略する。

次に定理2の拡張をする。図式的には

$$\varepsilon\text{についての条件} \underset{\text{定理4}}{\overset{\text{定理3}}{\rightleftarrows}} L_\varepsilon(F)\text{の構造}$$

のように2つの部分にわけて行う。結果を述べるためにいくつかの定義を準備する。

定義4. $d(F) = \mathrm{Sup}\{k \mid \exists F_1 < \cdots < F_k = F\}$

ただし $F_1 < F_2 \iff F_1 \subset \overline{F_2}$ かつ $F_1 \neq F_2$.

定義5. $d(\varepsilon)$ を帰納的に定義する.

(I) $d(\varepsilon) = 1 \iff \varepsilon$: 孤立

(II) $d(\varepsilon) = d > 1 \iff \begin{cases} (a)\ \exists U \in \varepsilon \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \Rightarrow d(\varepsilon') < d. \\ (b)\ \forall U \in \varepsilon,\ \exists \varepsilon' \ni U \text{ s.t. } d(\varepsilon') = d-1. \end{cases}$

(III) (I)(II) で $d(\varepsilon)$ が決まらない ε に対して, $d(\varepsilon) = \infty$.

定義6. $L^*_\varepsilon(F) = L_\varepsilon(F) - \bigcap_{U \in \varepsilon} \left(\bigcup_{U \in \varepsilon' \neq \varepsilon} L_{\varepsilon'}(F) \right)$

とおいて, $L^*_\varepsilon(F)$ を $L_\varepsilon(F)$ の主部と呼ぶ.

定義7. tame end を次のように帰納的に定義する.

(I) $d(\varepsilon) = 1$ の end が tame $\iff \begin{cases} ①\ L_\varepsilon(F) \cap F = \phi \\ ②\ \varepsilon \text{ が } L_\varepsilon(F) \text{ に一方側から近づく.} \end{cases}$

$a(\varepsilon) = \mathrm{Sup}\{ d(\partial U, L_\varepsilon(F)) \mid U \in \varepsilon \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon' = \varepsilon \}.$

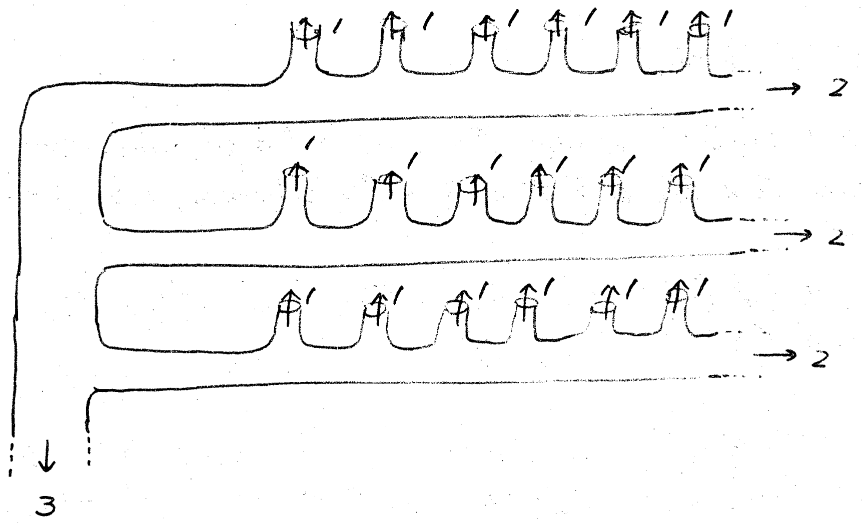
(II) $d(\varepsilon) = d > 1$ の end が tame

$\iff \begin{cases} ①\ L_\varepsilon(F) \cap F = \phi. \quad ②\ \varepsilon \text{ は } L^*_\varepsilon(F) \text{ に一方側から近づく。} \\ ③\ \exists U \in \varepsilon,\ \exists a > 0 \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \text{ ならば } a(\varepsilon') > a \text{ で} \\ \quad \varepsilon' \text{ は } d(\varepsilon') < d \text{ の tame end.} \end{cases}$

$a(\varepsilon) = \mathrm{Sup}\{ d(\partial U, L_\varepsilon(F)) \mid U \in \varepsilon \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon' \text{ tame end. } d(\varepsilon') < d \}.$

(注). 葉層構造$\mathcal{F}$がC^2級で, $\sup\{d(F) \mid F$は$\mathcal{F}$の葉$\} < \infty$, 更に$\mathcal{F}$のすべての葉のホロノミー群が可換のとき, $\mathcal{F}$のすべての葉のすべての *end* は *tame* になる。

$d(\varepsilon)$を例をあげて説明する。



さて準備ができたので定理を述べる。証明は複雑であるから省略するが *idea* は基本的には定理2のときと同じである。

定理3. εを葉Fの *tame end* とする。そのとき

(1) $L_\varepsilon(F)$は有限個の *depth* $\leqq d(\varepsilon)$の真葉の和.

(2) $L_\varepsilon^*(F)$は *depth* $d(\varepsilon)$の葉で, $L_\varepsilon(F) = Cl_M(L_\varepsilon^*(F))$.

(3) $F' \subset L_\varepsilon(F)$ならば, F'のすべての *end* は *depth* $< d(F')$の *tame end* であり, F'は *depth* $d(F')-1$の *end* は有限個もつ。

定理4. 葉F_0のすべての end が tame で $d(F_0)<\infty$ とする。このとき葉Fの end ε が $L_\varepsilon(F)=Cl_M(F_0)$ を満たすならば，ε は depth d の tame end であり $L^*_\varepsilon(F)=F_0$ となる。

REFERENCES

[1] G. Hector, Classification cohomologique des germes de feuilletages, Publication internes de l'uer de mathematiques pures, N°53, 1975.

[2] H. Nakatsuka, On representations of homology classes, Proc. Japan Acad. 48 (1972), 360-364.

[3] T. Nishimori, Isolated ends of open leaves of codimension-one foliations, Quart. J. Math. Oxford (3), 26 (1975), 159-167.

[4] T. Nishimori, Compact leaves with abelian holonomy, Tôhoku Math. Journ. 27 (1975), 259-272.

[5] T. Nishimori, Behaviour of leaves of codimension-one foliations, to appear.

[6] T. Nishimori, Ends of leaves of codimension-one foliations whose limit sets consist of a finite number of leaves, to appear.

[7] L. C. Siebenmann, The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five, Thesis, Princeton 1965.